

Chuyên đề 1

Khảo Sát Sự Biến Thiên Và Vẽ Đồ Thị Hàm Số

§1. Tính Đơn Diệu Của Hàm Số

Bài tập 1.1. Tìm các khoảng đơn điệu của các hàm số sau

a) $y = 2x^3 - 3x^2 + 1$.

b) $y = -x^3 - 3x + 2$.

c) $y = x^3 + 3x^2 + 3x$.

d) $y = x^4 - 2x^2 + 3$.

e) $y = -x^4 + 2x^3 - 2x - 1$.

f) $y = \sqrt{x^2 - 2x - 3}$.

g) $y = \frac{2x+3}{x+2}$.

h) $y = \frac{x+2}{3x-1}$.

i) $y = \frac{x^2 - 4x + 4}{1-x}$.

Lời giải.

a) Tập xác định: $D = \mathbb{R}$. Đạo hàm: $y' = 6x^2 - 6x$; $y' = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \\ x = 1 \end{cases}$. Bảng biến thiên:

x	$-\infty$	0	1	$+\infty$			
y'		+	0	-	0	+	
y	$-\infty$		1		0		$+\infty$

Vậy hàm số đồng biến trên các khoảng $(-\infty; 0)$, $(1; +\infty)$ và nghịch biến trên $(0; 1)$.

b) Tập xác định: $D = \mathbb{R}$. Đạo hàm: $y' = -3x^2 - 3 < 0, \forall x \in \mathbb{R}$. Do đó hàm số luôn nghịch biến trên \mathbb{R} .

c) Tập xác định: $D = \mathbb{R}$. Đạo hàm: $y' = 3x^2 + 6x + 3 \geq 0, \forall x \in \mathbb{R}$. Do đó hàm số luôn đồng biến trên \mathbb{R} .

d) Tập xác định: $D = \mathbb{R}$. Đạo hàm: $y' = 4x^3 - 4x$; $y' = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \\ x = \pm 1 \end{cases}$. Bảng biến thiên:

x	$-\infty$	-1	0	1	$+\infty$
y'	$-$	0	$+$	0	$+$
y	$+\infty$		2	3	$+\infty$

Vậy hàm số đồng biến trên các khoảng $(-1; 0)$, $(1; +\infty)$ và nghịch biến trên các khoảng $(-\infty; -1)$, $(0; 1)$.

e) Tập xác định: $D = \mathbb{R}$. Đạo hàm: $y' = -4x^3 + 6x^2 - 2$; $y' = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 1 \\ x = -\frac{1}{2} \end{cases}$. Bảng biến thiên:

x	$-\infty$	$-\frac{1}{2}$	1	$+\infty$	
y'	$+$	0	$-$	0	$-$
y	$-\infty$	$-\frac{5}{16}$	-2	$-\infty$	

Vậy hàm số đồng biến trên khoảng $-\infty; -\frac{1}{2}$ và nghịch biến trên khoảng $-\frac{1}{2}; +\infty$.

f) Tập xác định: $D = (-\infty; -1] \cup [3; +\infty)$. Đạo hàm: $y' = \frac{x-1}{\sqrt{x^2-2x-3}}$; $y' = 0 \Leftrightarrow x = 1$. Bảng biến thiên:

x	$-\infty$	-1	3	$+\infty$
y'	$-$		$+$	
y	$+\infty$	0	0	$+\infty$

Vậy hàm số đồng biến trên khoảng $(3; +\infty)$ và nghịch biến trên khoảng $(-\infty; -1)$.

g) Tập xác định: $D = \mathbb{R} \setminus \{-2\}$. Đạo hàm: $y' = \frac{1}{(x+2)^2} > 0, \forall x \in D$.

Do đó hàm số đồng biến trên các khoảng $(-\infty; -2)$ và $(-2; +\infty)$.

h) Tập xác định: $D = \mathbb{R} \setminus \{\frac{1}{3}\}$. Đạo hàm: $y' = -\frac{7}{(3x-1)^2} < 0, \forall x \in D$.

Do đó hàm số nghịch biến trên các khoảng $(-\infty; \frac{1}{3})$ và $(\frac{1}{3}; +\infty)$.

i) Tập xác định: $D = \mathbb{R} \setminus \{1\}$. Đạo hàm: $y' = \frac{-x^2+2x}{(1-x)^2}$; $y' = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x=0 \\ x=2 \end{cases}$. Bảng biến thiên:

x	$-\infty$	0	1	2	$+\infty$	
y'	$-$	0	$+$	$+$	0	$-$
y	$+\infty$	2	$+\infty$	0	$-\infty$	$-\infty$

Vậy hàm số đồng biến trên các khoảng $(0; 1)$, $(1; 2)$ và nghịch biến trên các khoảng $(-\infty; 0)$, $(2; +\infty)$.

Bài tập 1.2. Tìm m để hàm số $y = x^3 + (m-1)x^2 + (m^2-4)x + 9$ luôn đồng biến trên \mathbb{R} .

Lời giải. Tập xác định: $D = \mathbb{R}$. Đạo hàm: $y' = 3x^2 + 2(m-1)x + m^2 - 4$; $\Delta' = (m-1)^2 - 3(m^2-4) = -2m^2 - 2m + 13$.

$$\text{Hàm số luôn đồng biến trên } \mathbb{R} \Leftrightarrow y' \geq 0, \forall x \in \mathbb{R} \Leftrightarrow \Delta' \leq 0 \Leftrightarrow -2m^2 - 2m + 13 \leq 0 \Leftrightarrow \begin{cases} m \leq \frac{-1-3\sqrt{3}}{2} \\ m \geq \frac{-1+3\sqrt{3}}{2} \end{cases}$$

Vậy với $m \in -\infty; \frac{-1-3\sqrt{3}}{2} \cup \left[\frac{-1+3\sqrt{3}}{2}; +\infty \right)$ thì hàm số đã cho luôn đồng biến trên \mathbb{R} .

Bài tập 1.3. Tìm m để hàm số $y = -mx^3 + (3-m)x^2 - 2x + 2$ luôn nghịch biến trên \mathbb{R} .

Lời giải. Tập xác định: $D = \mathbb{R}$.

- Với $m = 0$, ta có: $y = 3x^2 - 2x + 2$ là một parabol nên không thể nghịch biến trên \mathbb{R} .
- Với $m \neq 0$, ta có: $y' = -3mx^2 + 2(3-m)x - 2$; $\Delta' = (3-m)^2 - 6m = m^2 - 12m + 9$.

Hàm số luôn nghịch biến trên $\mathbb{R} \Leftrightarrow y' \leq 0, \forall x \in \mathbb{R}$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} m < 0 \\ m^2 - 12m + 9 \leq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m < 0 \\ 6 - 3\sqrt{3} \leq m \leq 6 + 3\sqrt{3} \end{cases} \Leftrightarrow m \in \emptyset$$

Vậy không có giá trị nào của m để hàm số luôn nghịch biến trên \mathbb{R} .

Bài tập 1.4. Tìm m để hàm số $y = \frac{mx-2}{m-x}$ luôn đồng biến trên mỗi khoảng xác định.

Lời giải. Tập xác định: $D = \mathbb{R} \setminus \{m\}$. Đạo hàm: $y' = \frac{m^2-2}{(m-x)^2}$.

$$\text{Hàm số luôn đồng biến trên mỗi khoảng xác định} \Leftrightarrow y' > 0, \forall x \in D \Leftrightarrow m^2 - 2 > 0 \Leftrightarrow \begin{cases} m \geq \sqrt{2} \\ m \leq -\sqrt{2} \end{cases}$$

Vậy với $m \in -\infty; -\sqrt{2} \cup [\sqrt{2}; +\infty)$ thì hàm số đã cho luôn đồng biến trên mỗi khoảng xác định.

Bài tập 1.5. Tìm m để hàm số $y = \frac{mx-2}{x+m-3}$ luôn nghịch biến trên mỗi khoảng xác định.

Lời giải. Tập xác định: $D = \mathbb{R} \setminus \{3 - m\}$. Đạo hàm: $y' = \frac{m^2 - 3m + 2}{(x + m - 3)^2}$.

Hàm số luôn nghịch biến trên mỗi khoảng xác định $\Leftrightarrow y' < 0, \forall x \in D \Leftrightarrow m^2 - 3m + 2 < 0 \Leftrightarrow 1 < m < 2$.
 Vậy với $m \in (1; 2)$ thì hàm số đã cho luôn nghịch biến trên mỗi khoảng xác định.

Bài tập 1.6. Tìm m để hàm số $y = x + 2 + \frac{m}{x - 1}$ luôn đồng biến trên mỗi khoảng xác định.

Lời giải. Tập xác định: $D = \mathbb{R} \setminus \{1\}$.

Đạo hàm: $y' = 1 - \frac{m}{(x - 1)^2} = \frac{x^2 - 2x + 1 - m}{(x - 1)^2}$; $y' = 0 \Leftrightarrow x^2 - 2x + 1 - m = 0$; $\Delta' = m$.

Hàm số đồng biến trên mỗi khoảng xác định khi và chỉ khi

$$y' \geq 0, \forall x \in D \Leftrightarrow x^2 - 2x + 1 - m \geq 0, \forall x \in D \Leftrightarrow \Delta' \leq 0 \Leftrightarrow m \leq 0$$

Vậy với $m \leq 0$ thì hàm số đã cho luôn đồng biến trên mỗi khoảng xác định.

Bài tập 1.7. Tìm m để hàm số $y = \frac{mx + 4}{x + m}$ nghịch biến trên $(-\infty; 1)$.

Lời giải. Tập xác định: $D = \mathbb{R} \setminus \{-m\}$. Đạo hàm: $y' = \frac{m^2 - 4}{(x + m)^2}$.

Hàm số nghịch biến trên $(-\infty; 1)$ khi và chỉ khi $y' < 0, \forall x \in (-\infty; 1)$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} -m \notin (-\infty; 1) \\ m^2 - 4 < 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -m \geq 1 \\ -2 < m < 2 \end{cases} \Leftrightarrow -2 < m \leq -1$$

Vậy với $m \in (-2; -1]$ thì hàm số đã cho luôn đồng biến trên mỗi khoảng xác định.

Bài tập 1.8. Tìm m để hàm số $y = \frac{mx - 2}{x + m - 3}$ nghịch biến trên $(1; +\infty)$.

Lời giải. Tập xác định: $D = \mathbb{R} \setminus \{3 - m\}$. Đạo hàm: $y' = \frac{m^2 - 3m + 2}{(x + m - 3)^2}$.

Hàm số nghịch biến trên $(1; +\infty) \Leftrightarrow y' < 0, \forall x \in (1; +\infty)$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 3 - m \notin (1; +\infty) \\ m^2 - 3m + 2 < 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 3 - m \leq 1 \\ 1 < m < 2 \end{cases} \Leftrightarrow m \in \emptyset$$

Vậy không có giá trị nào của m để hàm số nghịch biến trên $(1; +\infty)$.

Bài tập 1.9. Tìm a để hàm số $y = x^3 + 3x^2 + ax + a$ nghịch biến trên đoạn có độ dài bằng 1.

Lời giải. Tập xác định: $D = \mathbb{R}$. Đạo hàm: $y' = 3x^2 + 6x + a$; $\Delta' = 9 - 3a$.

- $\Delta' \leq 0 \Leftrightarrow a \geq 3 \Rightarrow y' \geq 0, \forall x \in \mathbb{R}$: Hàm số đồng biến trên \mathbb{R} nên không thỏa mãn yêu cầu bài toán.
- $\Delta' > 0 \Leftrightarrow a < 3$, y' có hai nghiệm x_1, x_2 ($x_1 < x_2$). Theo định lý Vi-ét có $x_1 + x_2 = -2$; $x_1 x_2 = \frac{a}{3}$.

Bảng biến thiên:

x	$-\infty$	x_1	x_2	$+\infty$		
y'	$+$	0	$-$	0	$+$	$+\infty$
y	$-\infty$	$y(x_1)$	$y(x_2)$	$+\infty$		

Từ bảng biến thiên ta có hàm số nghịch biến trên $[x_1; x_2]$.

Do đó hàm số nghịch biến trên đoạn có độ dài bằng 1 khi và chỉ khi

$$|x_1 - x_2| = 1 \Leftrightarrow (x_1 - x_2)^2 = 1 \Leftrightarrow (x_1 + x_2)^2 - 4x_1 x_2 = 1 \Leftrightarrow 4 - \frac{4a}{3} = 1 \Leftrightarrow a = \frac{9}{4} \text{ (thỏa mãn)}$$

Vậy với $a = \frac{9}{4}$ thì hàm số đã cho nghịch biến trên đoạn có độ dài bằng 1.

Bài tập 1.10. Tìm m để hàm số $y = -x^3 + 3x^2 + mx + 2$ đồng biến trên đoạn có độ dài bằng 3.

Lời giải. Tập xác định: $D = \mathbb{R}$. Đạo hàm: $y' = -3x^2 + 6x + m$; $\Delta' = 9 + 3m$.

- $\Delta' \leq 0 \Leftrightarrow m \leq -3 \Rightarrow y' \leq 0, \forall x \in \mathbb{R}$: Hàm số nghịch biến trên \mathbb{R} nên không thỏa mãn yêu cầu bài toán.
- $\Delta' > 0 \Leftrightarrow m > -3$, y' có hai nghiệm x_1, x_2 ($x_1 < x_2$). Theo định lý Vi-ét có $x_1 + x_2 = 2$; $x_1 x_2 = -\frac{m}{3}$.

Bảng biến thiên:

x	$-\infty$	x_1	x_2	$+\infty$
y'		$-$	0	$+$
y	$+\infty$	$y(x_1)$	$y(x_2)$	$-\infty$

Từ bảng biến thiên ta có hàm số đồng biến trên $[x_1; x_2]$.
Do đó hàm số đồng biến trên đoạn có độ dài bằng 3 khi và chỉ khi

$$|x_1 - x_2| = 3 \Leftrightarrow (x_1 - x_2)^2 = 9 \Leftrightarrow (x_1 + x_2)^2 - 4x_1x_2 = 9 \Leftrightarrow 4 + \frac{4m}{3} = 9 \Leftrightarrow m = \frac{15}{4} \text{ (thỏa mãn)}$$

Vậy với $m = \frac{15}{4}$ thì hàm số đã cho đồng biến trên đoạn có độ dài bằng 3.

§2. Cực Trị Của Hàm Số

www.DeThiThu.Net

Bài tập 1.11. Tìm cực trị của các hàm số sau

a) $y = 2x^3 - 3x^2 + 1$.

b) $y = -x^3 - 3x + 2$.

c) $y = x^3 + 3x^2 + 3x$.

d) $y = x^4 - 2x^2 + 3$.

e) $y = -x^4 + 2x^3 - 2x - 1$.

f) $y = \sqrt{x^2 - 2x - 3}$.

g) $y = \frac{2x+3}{x+2}$.

h) $y = \frac{x+2}{3x-1}$.

i) $y = \frac{x^2 - 4x + 4}{1-x}$.

Lời giải.

a) Tập xác định: $D = \mathbb{R}$. Đạo hàm: $y' = 6x^2 - 6x$; $y' = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \\ x = 1 \end{cases}$. Bảng biến thiên:

x	$-\infty$	0	1	$+\infty$
y'		$+$	0	$-$
y	$-\infty$	1	0	$+\infty$

Vậy hàm số đạt cực đại tại $x = 0$; $y_{CD} = 1$ và đạt cực tiểu tại $x = 1$; $y_{CT} = 0$.

b) Tập xác định: $D = \mathbb{R}$. Đạo hàm: $y' = -3x^2 - 3 < 0, \forall x \in \mathbb{R}$. Do đó hàm số không có cực trị.

c) Tập xác định: $D = \mathbb{R}$. Đạo hàm: $y' = 3x^2 + 6x + 3 \geq 0, \forall x \in \mathbb{R}$. Do đó hàm số không có cực trị.

d) Tập xác định: $D = \mathbb{R}$. Đạo hàm: $y' = 4x^3 - 4x$; $y' = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \\ x = \pm 1 \end{cases}$. Bảng biến thiên:

x	$-\infty$	-1	0	1	$+\infty$
y'		$-$	0	$+$	0
y	$+\infty$	2	3	2	$+\infty$

Vậy hàm số đạt cực đại tại $x = 0$; $y_{CD} = 3$ và đạt cực tiểu tại $x = \pm 1$; $y_{CT} = 2$.

e) Tập xác định: $D = \mathbb{R}$. Đạo hàm: $y' = -4x^3 + 6x^2 - 2$; $y' = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 1 \\ x = -\frac{1}{2} \end{cases}$. Bảng biến thiên:

x	$-\infty$	$-\frac{1}{2}$	1	$+\infty$
y'		$+$	0	$-$
y	$-\infty$	$-\frac{5}{16}$	-2	$-\infty$

Vậy hàm số đạt cực đại tại $x = -\frac{1}{2}$; $y_{CD} = -\frac{5}{16}$.

f) Tập xác định: $D = (-\infty; -1] \cup [3; +\infty)$. Đạo hàm: $y' = \frac{x-1}{\sqrt{x^2-2x-3}}$; $y' = 0 \Leftrightarrow x = 1$. Bảng biến thiên:

x	$-\infty$	-1	3	$+\infty$
y'	$-$		$+$	
y	$+\infty$	0	0	$+\infty$

Vậy hàm số không có cực trị.

g) Tập xác định: $D = \mathbb{R} \setminus \{-2\}$. Đạo hàm: $y' = \frac{1}{(x+2)^2} > 0, \forall x \in D$. Do đó hàm số không có cực trị.

h) Tập xác định: $D = \mathbb{R} \setminus \{\frac{1}{3}\}$. Đạo hàm: $y' = -\frac{7}{(3x-1)^2} < 0, \forall x \in D$. Do đó hàm số không có cực trị.

i) Tập xác định: $D = \mathbb{R} \setminus \{1\}$. Đạo hàm: $y' = \frac{-x^2+2x}{(1-x)^2}; y' = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x=0 \\ x=2 \end{cases}$. Bảng biến thiên:

x	$-\infty$	0	1	2	$+\infty$	
y'	$-$	0	$+$	$+$	0	$-$
y	$+\infty$	2	$+\infty$	0	$-\infty$	$-\infty$

Vậy hàm số đạt cực đại tại $x=2; y_{CD} = 0$ và đạt cực tiểu tại $x=0; y_{CT} = 2$.

Bài tập 1.12. Tìm m để hàm số $y = x^3 - 3mx^2 + 3(2m-1)x - 2$

a) Có cực trị.

b) Đạt cực trị tại $x=0$.

c) Đạt cực đại tại $x=1$.

Lời giải. Tập xác định: $D = \mathbb{R}$. Đạo hàm: $y' = 3x^2 - 6mx + 3(2m-1); \Delta' = 9m^2 - 18m + 9$.

a) Hàm số có cực trị $\Leftrightarrow y'$ có hai nghiệm phân biệt $\Leftrightarrow 9m^2 - 18m + 9 > 0 \Leftrightarrow m \neq 1$.

b) Hàm số đạt cực trị tại $x=0 \Rightarrow y'(0) = 0 \Leftrightarrow 3(2m-1) = 0 \Leftrightarrow m = \frac{1}{2}$.

Với $m = \frac{1}{2} \Rightarrow y' = 3x^2 - 3x; y'' = 6x - 3; y''(0) = -3 < 0 \Rightarrow$ hàm số đạt cực đại tại $x=0 \Rightarrow m = \frac{1}{2}$ thỏa mãn.

Vậy với $m = \frac{1}{2}$ thì hàm số đã cho đạt cực trị tại $x=0$.

c) Hàm số đạt cực đại tại $x=1 \Rightarrow y'(1) = 0 \Leftrightarrow 3 - 6m + 3(2m-1) = 0 \Leftrightarrow 0 = 0$ (đúng $\forall m \in \mathbb{R}$).

Lại có: $y'' = 6x - 6m; y''(1) = 6 - 6m$.

Với $y''(1) > 0 \Leftrightarrow m < 1 \Rightarrow$ hàm số đạt cực tiểu tại $x=1 \Rightarrow m < 1$ không thỏa mãn.

Với $y''(1) < 0 \Leftrightarrow m > 1 \Rightarrow$ hàm số đạt cực đại tại $x=1 \Rightarrow m > 1$ thỏa mãn.

Với $y''(1) = 0 \Leftrightarrow m = 1$, ta có $y' = 3x^2 - 6x + 3 = 3(x-1)^2 \geq 0, \forall x \in \mathbb{R} \Rightarrow$ hàm số không có cực trị.

Vậy với $m > 1$ thì hàm số đã cho đạt cực đại tại $x=1$.

Bài tập 1.13. Cho hàm số $y = \frac{1}{3}x^3 - mx^2 + (m^2 - m + 1)x + 1$. Với giá trị nào của m thì hàm số

a) Đạt cực đại tại $x=1$.

b) Có cực đại, cực tiểu.

c) Không có cực trị.

Lời giải. Tập xác định: $D = \mathbb{R}$. Đạo hàm: $y' = x^2 - 2mx + m^2 - m + 1; \Delta' = m - 1$.

a) Hàm số đạt cực đại tại $x=1 \Rightarrow y'(1) = 0 \Leftrightarrow 1 - 2m + m^2 - m + 1 = 0 \Leftrightarrow m^2 - 3m + 2 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} m=1 \\ m=2 \end{cases}$.

• Với $m=1 \Rightarrow y' = x^2 - 2x + 1 = (x-1)^2 \geq 0, \forall x \in \mathbb{R} \Rightarrow$ hàm số không có cực trị.

• Với $m=2 \Rightarrow y' = x^2 - 4x + 3; y'' = 2x - 4; y''(1) = -2 < 0 \Rightarrow$ hàm số đạt cực đại tại $x=1$.

Vậy với $m=2$ thì hàm số đã cho đạt cực đại tại $x=1$.

b) Hàm số có cực đại, cực tiểu $\Leftrightarrow y'$ có hai nghiệm phân biệt $\Leftrightarrow \Delta' > 0 \Leftrightarrow m - 1 > 0 \Leftrightarrow m > 1$.

c) Hàm số không có cực trị $\Leftrightarrow y'$ không có hai nghiệm phân biệt $\Leftrightarrow \Delta' \leq 0 \Leftrightarrow m - 1 \leq 0 \Leftrightarrow m \leq 1$.

Bài tập 1.14. Cho hàm số $y = x^4 - 2(m+1)x^2 + 2m + 1$. Với giá trị nào của m thì hàm số

a) Có ba điểm cực trị.

b) Đạt cực tiểu tại $x=0$.

c) Đạt cực trị tại $x=1$.

Lời giải. Tập xác định: $D = \mathbb{R}$. Đạo hàm: $y' = 4x^3 - 4(m+1)x$.

a) $y' = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x=0 \\ x^2 = m+1 \end{cases}$. Hàm số có ba điểm cực trị $\Leftrightarrow y'$ có ba nghiệm phân biệt $\Leftrightarrow m+1 > 0 \Leftrightarrow m > -1$.

b) Hàm số đạt cực tiểu tại $x=0 \Rightarrow y'(0) = 0 \Leftrightarrow 0 = 0$ (đúng $\forall m \in \mathbb{R}$).

Lại có: $y'' = 12x^2 - 4(m+1); y''(0) = -4(m+1)$.

Với $y''(0) > 0 \Leftrightarrow m < -1 \Rightarrow$ hàm số đạt cực tiểu tại $x=0 \Rightarrow m < -1$ thỏa mãn.

Với $y''(0) < 0 \Leftrightarrow m > -1 \Rightarrow$ hàm số đạt cực đại tại $x=0 \Rightarrow m > -1$ không thỏa mãn.

Với $y''(0) = 0 \Leftrightarrow m = -1$, ta có $y' = 4x^3; y' = 0 \Leftrightarrow x=0$.

x	$-\infty$	0	$+\infty$
y'	$-$	0	$+$
y	$+\infty$	-1	$+\infty$

Suy ra hàm số đạt cực tiểu tại $x = 0$. Vậy với $m \leq -1$ thì hàm số đã cho đạt cực tiểu tại $x = 0$.

c) Hàm số đạt cực trị tại $x = 1 \Rightarrow y'(1) = 0 \Leftrightarrow 4 - 4(m+1) = 0 \Leftrightarrow m = 0$.

Với $m = 0 \Rightarrow y' = 4x^3 - 4x; y'' = 12x^2 - 4; y''(1) = 8 > 0 \Rightarrow$ hàm số đạt cực tiểu tại $x = 1 \Rightarrow m = 0$ thỏa mãn.

Vậy với $m = 0$ thì hàm số đã cho đạt cực trị tại $x = 1$.

Bài tập 1.15. Tìm m để hàm số $y = -x^4 + 2(2m - 1)x^2 + 3$ có đúng một cực trị.

Lời giải. Tập xác định: $D = \mathbb{R}$. Đạo hàm: $y' = -4x^3 + 4(2m - 1)x = 4x(-x^2 + 2m - 1)$. $y' = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \\ x^2 = 2m - 1 \end{cases}$.

Hàm số có đúng một cực trị $\Leftrightarrow y'$ có đúng một nghiệm $\Leftrightarrow 2m - 1 \leq 0 \Leftrightarrow m \leq \frac{1}{2}$.

Bài tập 1.16. (B-02) Tìm m để hàm số $y = mx^4 + (m^2 - 9)x^2 + 10$ có ba điểm cực trị.

Lời giải. Tập xác định: $D = \mathbb{R}$. Đạo hàm: $y' = 4mx^3 + 2(m^2 - 9)x = 2x(2mx^2 + m^2 - 9)$.

• Với $m = 0$, ta có $y' = -18x$ có một nghiệm nên hàm số không thể có ba cực trị.

• Với $m \neq 0$, ta có $y' = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \\ x^2 = \frac{9 - m^2}{2m} \end{cases}$.

Hàm số có ba cực trị $\Leftrightarrow y'$ có ba nghiệm phân biệt $\Leftrightarrow \frac{9 - m^2}{2m} > 0$. Bảng xét dấu:

m	$-\infty$	-3	0	3	$+\infty$
$9 - m^2$	$-$	0	$+$	0	$-$
$2m$	$-$	$-$	0	$+$	$+$
VT	$+$	0	$-$	$+$	0

Từ bảng xét dấu ta có $m \in (-\infty; -3) \cup (0; 3)$.

Bài tập 1.17. Xác định giá trị của m để hàm số $y = \frac{x^2 + mx + 1}{x + m}$

a) Không có cực trị.

b) Đạt cực tiểu tại $x = 1$.

c) Đạt cực đại tại $x = 2$.

Lời giải. Tập xác định: $D = \mathbb{R} \setminus \{-m\}$.

a) Đạo hàm: $y' = \frac{x^2 + 2mx + m^2 - 1}{(x + m)^2}$; $y' = 0 \Leftrightarrow x = -m \pm 1 \Rightarrow$ hàm số luôn có cực trị.

Vậy không có giá trị nào của m để hàm số không có cực trị.

b) Hàm số đạt cực tiểu tại $x = 1 \Rightarrow y'(1) = 0 \Leftrightarrow \frac{m^2 + 2m}{(m + 1)^2} = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} m = 0 \\ m = -2 \end{cases}$.

• Với $m = 0 \Rightarrow y' = \frac{x^2 - 1}{x^2}$; $y' = 0 \Leftrightarrow x = \pm 1$.

x	$-\infty$	-1	0	1	$+\infty$
y'	$+$	0	$-$	0	$+$
y	$-\infty$	-2	$+\infty$	2	$+\infty$

Từ bảng biến thiên suy ra hàm số đạt cực tiểu tại $x = 1 \Rightarrow m = 0$ thỏa mãn.

• Với $m = -2 \Rightarrow y' = \frac{x^2 - 4x + 3}{(x - 2)^2}$; $y' = 0 \Leftrightarrow x = 1$ hoặc $x = 3$.

x	$-\infty$	1	2	3	$+\infty$
y'	$+$	0	$-$	0	$+$
y	$-\infty$	0	$+\infty$	4	$+\infty$

Từ bảng biến thiên suy ra hàm số đạt cực đại tại $x = 1 \Rightarrow m = -2$ không thỏa mãn.

Vậy với $m = 0$ thì hàm số đã cho đạt cực tiểu tại $x = 1$.

c) Hàm số đạt cực đại tại $x = 2 \Rightarrow y'(2) = 0 \Leftrightarrow \frac{m^2 + 4m + 3}{(m + 2)^2} = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} m = -1 \\ m = -3 \end{cases}$.

• Với $m = -1 \Rightarrow y' = \frac{x^2 - 2x}{(x - 1)^2}$; $y' = 0 \Leftrightarrow x = 0$ hoặc $x = 2$.

x	$-\infty$	0	1	2	$+\infty$	
y'	$+$	0	$-$	$-$	0	$+$
y	$-\infty$	-1	$+\infty$	3	$+\infty$	

Từ bảng biến thiên suy ra hàm số đạt cực tiểu tại $x = 2 \Rightarrow m = -1$ không thỏa mãn.

• Với $m = -3 \Rightarrow y' = \frac{x^2 - 6x + 8}{(x - 3)^2}$; $y' = 0 \Leftrightarrow x = 2$ hoặc $x = 4$.

x	$-\infty$	2	3	4	$+\infty$	
y'	+	0	-	-	0	+
y	$-\infty$	1	$+\infty$	5	$+\infty$	

Từ bảng biến thiên suy ra hàm số đạt cực đại tại $x = 2 \Rightarrow m = -3$ thỏa mãn.

Vậy với $m = -3$ thì hàm số đã cho đạt cực đại tại $x = 2$.

§3. Giá Trị Lớn Nhất Và Giá Trị Nhỏ Nhất Của Hàm Số

Bài tập 1.18. Tìm giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất (nếu có) của các hàm số sau:

a) $y = 1 + 8x - 2x^2$ trên $[-1; 3]$. b) $y = x^3 - 3x^2 + 1$ trên $[-2; 3]$. c) $y = 1 + 4x^3 - 3x^4$ trên $[-2; 1]$.

d) $y = x^3 - 3x^2 + 1$ trên $(1; 4)$. e) $y = x - 5 + \frac{1}{x}$ trên $(0; +\infty)$. f) $y = x - \frac{1}{x}$ trên $(0; 2]$.

g) $y = \frac{4}{1 + x^2}$.

h) $y = x^4 + 2x^2 - 1$.

i) $y = x + \sqrt{4 - x^2}$.

Lời giải.

a) Ta có: $y' = 8 - 4x$; $y' = 0 \Leftrightarrow x = 2$; $y(-1) = -9$, $y(2) = 9$, $y(3) = 7$.

Vậy $\max_{[-1; 3]} y = y(2) = 9$; $\min_{[-1; 3]} y = y(-1) = -9$.

b) Ta có: $y' = 3x^2 - 6x$; $y' = 0 \Leftrightarrow x = 0$ hoặc $x = 2$; $y(-2) = -19$, $y(0) = 1$, $y(2) = -3$, $y(3) = 1$.

Vậy $\max_{[-2; 3]} y = y(0) = y(3) = 1$; $\min_{[-2; 3]} y = y(-2) = -19$.

c) Ta có: $y' = 12x^2 - 12x^3$; $y' = 0 \Leftrightarrow x = 0$ hoặc $x = 1$; $y(-2) = -79$, $y(0) = 1$, $y(1) = 2$.

Vậy $\max_{[-2; 1]} y = y(1) = 2$; $\min_{[-2; 1]} y = y(-2) = -79$.

d) Ta có: $y' = 3x^2 - 6x$; $y' = 0 \Leftrightarrow x = 0$ hoặc $x = 2$.

x	1	2	4
y'	-	0	+
y	-1	-3	17

Vậy $\min_{(1; 4)} y = y(2) = -3$; hàm số không có giá trị lớn nhất.

e) Ta có: $y' = 1 - \frac{1}{x^2}$; $y' = 0 \Leftrightarrow x = \pm 1$.

x	0	1	$+\infty$
y'	-	0	+
y	$+\infty$	-3	$+\infty$

Vậy $\min_{(0;+\infty)} y = y(1) = -3$; hàm số không có giá trị lớn nhất.

f) Ta có: $y' = 1 + \frac{1}{x^2} > 0, \forall x \in (0; 2]$.

x	0	2
y'	+	
y	$-\infty$	$\frac{3}{2}$

Vậy $\max_{(0;2]} y = y(2) = \frac{3}{2}$; hàm số không có giá trị nhỏ nhất.

g) Tập xác định: $D = \mathbb{R}$. Ta có: $y' = -\frac{8x}{(1+x^2)^2}$; $y' = 0 \Leftrightarrow x = 0$.

x	$-\infty$	0	$+\infty$
y'	+	0	-
y	0	4	0

Vậy $\max_{\mathbb{R}} y = y(0) = 4$; hàm số không có giá trị nhỏ nhất.

h) Tập xác định: $D = \mathbb{R}$. Ta có: $y' = 4x^3 + 4x$; $y' = 0 \Leftrightarrow x = 0$.

x	$-\infty$	0	$+\infty$
y'	-	0	+
y	$+\infty$	-1	$+\infty$

Vậy $\min_{\mathbb{R}} y = y(0) = -1$; hàm số không có giá trị lớn nhất.

i) Tập xác định: $D = [-2; 2]$. Ta có: $y' = 1 - \frac{x}{\sqrt{4-x^2}}$; $y' = 0 \Leftrightarrow x = \sqrt{2}$; $y(-2) = 0, y(\sqrt{2}) = 2\sqrt{2}, y(2) = 0$.

Vậy $\max_{[-2;2]} y = y(\sqrt{2}) = 2\sqrt{2}$; $\min_{[-2;2]} y = y(\pm 2) = 0$.

Bài tập 1.19. Tìm giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất (nếu có) của các hàm số sau

- a) $y = x + \sqrt{2} \cos x$ trên $[0; \frac{\pi}{2}]$. b) $y = 2 \sin x - \frac{4}{3} \sin^3 x$ trên $[0; \pi]$. c) $y = \sin^4 x - 4 \sin^2 x + 5$.
d) $y = \sin^4 x + \cos^4 x$. e) $y = 5 \sin x - 12 \cos x - 5$. f) $y = \sin^2 x + \sin 2x + 2 \cos^2 x$.

Lời giải.

a) Ta có: $y' = 1 - \sqrt{2} \sin x$; $y' = 0 \Leftrightarrow \sin x = \frac{1}{\sqrt{2}} \Leftrightarrow x = \frac{\pi}{4}$; $y(0) = \sqrt{2}, y(\frac{\pi}{4}) = \frac{\pi}{4} + 1, y(\frac{\pi}{2}) = \frac{\pi}{2}$.

Vậy $\max_{[0; \frac{\pi}{2}]} y = y(\frac{\pi}{4}) = \frac{\pi}{4} + 1$; $\min_{[0; \frac{\pi}{2}]} y = y(0) = \sqrt{2}$.

b) Đặt $\sin x = t, t \in [0; 1]$. Hàm số trở thành $y = f(t) = 2t - \frac{4}{3}t^3$.

Ta có: $f'(t) = 2 - 4t^2$; $f'(t) = 0 \Leftrightarrow t = \frac{1}{\sqrt{2}}$; $f(0) = 0, f(\frac{1}{\sqrt{2}}) = \frac{2\sqrt{2}}{3}, y(1) = \frac{2}{3}$.

Vậy $\max_{[0;1]} y = \max_{[0;1]} f(t) = f(\frac{1}{\sqrt{2}}) = \frac{2\sqrt{2}}{3}$; $\min_{[0;1]} y = \min_{[0;1]} f(t) = f(0) = 0$.

c) Tập xác định: $D = \mathbb{R}$. Đặt $\sin x = t, t \in [-1; 1]$. Hàm số trở thành $y = f(t) = t^4 - 4t^2 + 5$.

Ta có: $f'(t) = 4t^3 - 8t$; $f'(t) = 0 \Leftrightarrow t = 0$ hoặc $t = \pm\sqrt{2}$ (loại); $f(0) = 5, f(\pm 1) = 2$.

Vậy $\max_{\mathbb{R}} y = \max_{[-1;1]} f(t) = f(0) = 5$; $\min_{\mathbb{R}} y = \min_{[-1;1]} f(t) = f(\pm 1) = 2$.

d) Tập xác định: $D = \mathbb{R}$.

Ta có: $y = \sin^4 x + \cos^4 x = 1 - \frac{1}{2} \sin^2 2x$. Đặt $\sin 2x = t, t \in [-1; 1]$. Hàm số trở thành $y = f(t) = 1 - \frac{1}{2}t^2$.

Đạo hàm: $f'(t) = -t$; $f'(t) = 0 \Leftrightarrow t = 0$; $f(\pm 1) = \frac{1}{2}, f(0) = 1$.

Vậy $\max_{\mathbb{R}} y = \max_{[-1;1]} f(t) = f(0) = 1$; $\min_{\mathbb{R}} y = \min_{[-1;1]} f(t) = f(\pm 1) = \frac{1}{2}$.

e) Ta có: $y = 5 \sin x - 12 \cos x - 5 \Leftrightarrow 5 \sin x - 12 \cos x = y + 5$.

Phương trình có nghiệm $\Leftrightarrow 5^2 + 12^2 \geq (y + 5)^2 \Leftrightarrow y^2 + 10y - 144 \leq 0 \Leftrightarrow -18 \leq y \leq 8$.

Vậy $\max_{\mathbb{R}} y = 8$; $\min_{\mathbb{R}} y = -18$.

f) Ta có: $y = \frac{1 - \cos 2x}{2} + \sin 2x + 1 + \cos 2x = \sin 2x + \frac{1}{2} \cos 2x + \frac{3}{2} \Leftrightarrow 2 \sin 2x + \cos 2x = 2y - 3$.

Phương trình có nghiệm $\Leftrightarrow 2^2 + 1^2 \geq (2y - 3)^2 \Leftrightarrow 4y^2 - 12y + 4 \leq 0 \Leftrightarrow \frac{3-\sqrt{5}}{2} \leq y \leq \frac{3+\sqrt{5}}{2}$.

Vậy $\max_{\mathbb{R}} y = \frac{3+\sqrt{5}}{2}$; $\min_{\mathbb{R}} y = \frac{3-\sqrt{5}}{2}$.

Bài tập 1.20. Cho parabol $(P) : y = x^2$ và điểm $A(-3; 0)$. Tìm điểm $M \in (P)$ sao cho khoảng cách AM ngắn nhất và tính khoảng cách đó.

Lời giải. Ta có: $M \in (P) \Rightarrow M(t; t^2) \Rightarrow \overrightarrow{AM} = (t+3; t^2) \Rightarrow AM = \sqrt{(t+3)^2 + t^4} = \sqrt{t^4 + t^2 + 6t + 9}$.

Xét hàm số $f(t) = t^4 + t^2 + 6t + 9$ trên \mathbb{R} ; $f'(t) = 4t^3 + 2t + 6$; $f'(t) = 0 \Leftrightarrow t = -1$. Bảng biến thiên:

t	$-\infty$	-1	$+\infty$
$f'(t)$	$-$	0	$+$
$f(t)$	$+\infty$	5	$+\infty$

Từ bảng biến thiên ta có $\min_{\mathbb{R}} f(t) = f(-1) = 5$.

Suy ra AM đạt giá trị nhỏ nhất bằng $\sqrt{5}$ khi $t = -1 \Rightarrow M(-1; 1)$. Vậy $M(-1; 1)$.

Bài tập 1.21. Tìm m để hàm số $y = x^3 + 3x^2 - mx - 4$ đồng biến trên $(-\infty; 0)$.

Lời giải. Ta có: $y' = 3x^2 + 6x - m$.

Hàm số đồng biến trên $(-\infty; 0) \Leftrightarrow 3x^2 + 6x - m \geq 0, \forall x \in (-\infty; 0) \Leftrightarrow m \leq 3x^2 + 6x, \forall x \in (-\infty; 0)$ (1)

Xét hàm số $f(x) = 3x^2 + 6x$ trên $(-\infty; 0]$ có $f'(x) = 6x + 6$; $f'(x) = 0 \Leftrightarrow x = -1$. Bảng biến thiên:

x	$-\infty$	-1	0
$f'(x)$	$-$	0	$+$
$f(x)$	$+\infty$	-3	0

Từ bảng biến thiên ta có $\min_{(-\infty; 0]} f(x) = f(-1) = -3$. Do đó (1) $\Leftrightarrow m \leq \min_{(-\infty; 0]} f(x) \Leftrightarrow m \leq -3$.

Bài tập 1.22. (BDT-79) Tìm m để hàm số $y = -\frac{1}{3}x^3 + (m-1)x^2 + (m+3)x - 4$ đồng biến trên $(0; 3)$.

Lời giải. Ta có: $y' = -x^2 + 2(m-1)x + m + 3 = m(2x+1) - x^2 - 2x + 3$.

Hàm số đồng biến trên $(0; 3) \Leftrightarrow m(2x+1) - x^2 - 2x + 3 \geq 0, \forall x \in (0; 3) \Leftrightarrow m \geq \frac{x^2 + 2x - 3}{2x+1}, \forall x \in (0; 3)$ (2).

Xét hàm số $f(x) = \frac{x^2 + 2x - 3}{2x+1}$ trên $[0; 3]$ có $f'(x) = \frac{2x^2 + 2x + 8}{(2x+1)^2} > 0, \forall x \in [0; 3]$. Bảng biến thiên:

x	0	3
$f'(x)$	$+$	
$f(x)$	-3	$\frac{12}{7}$

Từ bảng biến thiên ta có $\max_{[0; 3]} f(x) = f(3) = \frac{12}{7}$. Do đó (2) $\Leftrightarrow m \geq \max_{[0; 3]} f(x) \Leftrightarrow m \geq \frac{12}{7}$.

Bài tập 1.23. Tìm m để hàm số $y = mx^3 - 3(m-1)x^2 + 9(m-2)x + 1$ đồng biến trên $[2; +\infty)$.

Lời giải. Ta có: $y' = 3mx^2 - 6(m-1)x + 9(m-2) = 3m(x^2 - 2x + 3) + 6x - 18$.

Hàm số đồng biến trên $[2; +\infty)$ khi và chỉ khi

$$3m(x^2 - 2x + 3) + 6x - 18 \geq 0, \forall x \in [2; +\infty) \Leftrightarrow m \geq \frac{6-2x}{x^2-2x+3}, \forall x \in [2; +\infty) \quad (3)$$

Xét hàm số $f(x) = \frac{6-2x}{x^2-2x+3}$ trên $[2; +\infty)$ có $f'(x) = \frac{2x^2 - 12x + 6}{(x^2 - 2x + 3)^2}$; $f'(x) = 0 \Leftrightarrow x = 3 \pm \sqrt{6}$.

Bảng biến thiên:

x	2	$3 + \sqrt{6}$	$+\infty$
$f'(x)$	-	0	+
$f(x)$	$\frac{2}{3}$	$f(3 + \sqrt{6})$	0

Từ bảng biến thiên ta có $\max_{[2; +\infty)} f(x) = f(2) = \frac{2}{3}$. Do đó (3) $\Leftrightarrow m \geq \max_{[2; +\infty)} f(x) \Leftrightarrow m \geq \frac{2}{3}$.

Bài tập 1.24. Tìm m để hàm số $y = x^3 + 3x^2 + (m+1)x + 4m$ đồng biến trên $(-\infty; -2)$ và $(2; +\infty)$.

Lời giải. Ta có: $y' = 3x^2 + 6x + m + 1$.

Hàm số đồng biến trên $(-\infty; -2)$ và $(2; +\infty)$ khi và chỉ khi

$$3x^2 + 6x + m + 1 \geq 0, \forall x \in (-\infty; -2) \cup (2; +\infty) \Leftrightarrow m \geq -3x^2 - 6x - 1, \forall x \in (-\infty; -2) \cup (2; +\infty) \quad (4)$$

Xét hàm số $f(x) = -3x^2 - 6x - 1$ trên $(-\infty; -2] \cup [2; +\infty)$ có $f'(x) = -6x - 6$; $f'(x) = 0 \Leftrightarrow x = -1$.

Bảng biến thiên:

x	$-\infty$	-2	2	$+\infty$
$f'(x)$	+		-	
$f(x)$	$-\infty$	-1	-25	$-\infty$

Từ bảng biến thiên ta có $\max_{(-\infty; -2] \cup [2; +\infty)} f(x) = f(-2) = -1$. Do đó (4) $\Leftrightarrow m \geq \max_{(-\infty; -2] \cup [2; +\infty)} f(x) \Leftrightarrow m \geq -1$.

Bài tập 1.25. (BDT-50) Tìm m để hàm số $y = \frac{mx^2 + 6x - 2}{x + 2}$ nghịch biến trên $[1; +\infty)$.

Lời giải. Hàm số xác định trên $[1; +\infty)$. Đạo hàm: $y' = \frac{mx^2 + 4mx + 14}{(x+2)^2} = \frac{m(x^2 + 4x) + 14}{(x+2)^2}$.

Hàm số nghịch biến trên $[1; +\infty) \Leftrightarrow \frac{m(x^2 + 4x) + 14}{(x+2)^2} \leq 0, \forall x \in [1; +\infty) \Leftrightarrow m \leq \frac{-14}{x^2 + 4x}, \forall x \in [1; +\infty) \quad (5)$.

Xét hàm số $f(x) = \frac{-14}{x^2 + 4x}$ trên $[1; +\infty)$ có $f'(x) = \frac{28x + 56}{(x^2 + 4x)^2} > 0, \forall x \in [1; +\infty)$. Bảng biến thiên:

x	1	$+\infty$
$f'(x)$	+	
$f(x)$	$-\frac{14}{5}$	0

Từ bảng biến thiên ta có $\min_{[1; +\infty)} f(x) = f(1) = -\frac{14}{5}$. Do đó (5) $\Leftrightarrow m \leq \min_{[1; +\infty)} f(x) \Leftrightarrow m \leq -\frac{14}{5}$.

Bài tập 1.26. Tìm m để hàm số $y = \frac{x^2 - 2mx + 2m^2 - 2}{x - m}$ đồng biến trên $(1; +\infty)$.

Lời giải. Tập xác định: $D = \mathbb{R} \setminus \{m\}$. Đạo hàm: $y' = \frac{x^2 - 2mx + 2}{(x - m)^2}$.

Hàm số đồng biến trên $(1; +\infty) \Leftrightarrow y' \geq 0, \forall x \in (1; +\infty)$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} m \notin (1; +\infty) \\ x^2 - 2mx + 2 \geq 0, \forall x \in (1; +\infty) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m \leq 1 \\ m \leq \frac{x^2 + 2}{2x}, \forall x \in (1; +\infty) \end{cases} \quad (1)$$

Xét hàm số $f(x) = \frac{x^2 + 2}{2x}$ trên $(1; +\infty)$ có $f'(x) = \frac{x^2 - 2}{2x^2}$; $f'(x) = 0 \Leftrightarrow x = \sqrt{2}$. Bảng biến thiên:

x	1	$\sqrt{2}$	$+\infty$
$f'(x)$	-	0	+
$f(x)$	$\frac{3}{2}$	$\sqrt{2}$	$+\infty$

Do đó (1) $\Leftrightarrow \begin{cases} m \leq 1 \\ m \leq \sqrt{2} \end{cases} \Leftrightarrow m \leq 1$. Vậy với $m \leq 1$ thì hàm số đồng biến trên $(1; +\infty)$.

Bài tập 1.27. Tìm a để hàm số $y = \frac{x^2 - 2ax + 4a^2}{x - 2a}$ đồng biến trên $(2; +\infty)$.

Lời giải. Tập xác định: $D = \mathbb{R} \setminus \{2a\}$. Đạo hàm: $y' = \frac{x^2 - 4ax}{(x - 2a)^2}$.

Hàm số đồng biến trên $(2; +\infty) \Leftrightarrow y' \geq 0, \forall x \in (2; +\infty)$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 2a \notin (2; +\infty) \\ x^2 - 4ax \geq 0, \forall x \in (2; +\infty) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2a \leq 2 \\ a \leq \frac{x}{4}, \forall x \in (2; +\infty) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a \leq 1 \\ a \leq \frac{1}{2} \end{cases} \Leftrightarrow a \leq \frac{1}{2}$$

Vậy với $m \leq \frac{1}{2}$ thì hàm số đồng biến trên $(2; +\infty)$.

§4. Đường Tiệm Cận Của Đồ Thị Hàm Số

Bài tập 1.28. Tìm tiệm cận (nếu có) của các hàm số sau

a) $y = \frac{2x - 1}{x - 2}$.

b) $y = \frac{x - 3}{-x + 2}$.

c) $y = \frac{3 - 4x}{x + 1}$.

d) $y = \frac{\sqrt{x^2 + x}}{x - 1}$.

e) $y = \frac{\sqrt{x + 3}}{x + 1}$.

f) $y = 2x - 1 + \frac{1}{x}$.

g) $y = \frac{x^2 - 4x + 4}{1 - x}$.

h) $y = \sqrt{x^2 + x - 1}$.

i) $y = x + \sqrt{x^2 + 2x}$.

Lời giải.

a) Tập xác định: $D = \mathbb{R} \setminus \{2\}$.

Ta có $\lim_{x \rightarrow \pm\infty} y = 2 \Rightarrow$ TCN là $y = 2$; $\lim_{x \rightarrow 2^+} y = +\infty, \lim_{x \rightarrow 2^-} y = -\infty \Rightarrow$ TCD là $x = 2$.

Vậy hàm số có tiệm cận ngang $y = 2$ và tiệm cận đứng $x = 2$.

b) Tập xác định: $D = \mathbb{R} \setminus \{2\}$.

Ta có $\lim_{x \rightarrow \pm\infty} y = -1 \Rightarrow$ TCN là $y = -1$; $\lim_{x \rightarrow 2^+} y = +\infty, \lim_{x \rightarrow 2^-} y = -\infty \Rightarrow$ TCD là $x = 2$.

Vậy hàm số có tiệm cận ngang $y = -1$ và tiệm cận đứng $x = 2$.

c) Tập xác định: $D = \mathbb{R} \setminus \{-1\}$.

Ta có $\lim_{x \rightarrow \pm\infty} y = -4 \Rightarrow$ TCN là $y = -4$; $\lim_{x \rightarrow -1^+} y = +\infty, \lim_{x \rightarrow -1^-} y = -\infty \Rightarrow$ TCD là $x = -1$.

Vậy hàm số có tiệm cận ngang $y = -4$ và tiệm cận đứng $x = -1$.

d) Tập xác định: $D = \mathbb{R} \setminus \{1\}$.

Ta có $\lim_{x \rightarrow \pm\infty} y = \pm 1 \Rightarrow$ TCN là $y = \pm 1$; $\lim_{x \rightarrow 1^+} y = +\infty, \lim_{x \rightarrow 1^-} y = -\infty \Rightarrow$ TCD là $x = 1$.

Vậy hàm số có hai tiệm cận ngang $y = \pm 1$ và tiệm cận đứng $x = 1$.

e) Tập xác định: $D = \mathbb{R} \setminus \{-1\}$.

Ta có $\lim_{x \rightarrow \pm\infty} y = 0 \Rightarrow$ TCN là $y = 0$; $\lim_{x \rightarrow -1^+} y = +\infty, \lim_{x \rightarrow -1^-} y = -\infty \Rightarrow$ TCD là $x = -1$.

Vậy hàm số có tiệm cận ngang $y = 0$ và tiệm cận đứng $x = -1$.

f) Tập xác định: $D = \mathbb{R} \setminus \{0\}$. Hàm số viết thành $y = \frac{2x^2 - x + 1}{x}$.

Ta có $\lim_{x \rightarrow \pm\infty} [y - (2x - 1)] = 0 \Rightarrow$ TCX là $y = 2x - 1$; $\lim_{x \rightarrow 0^+} y = +\infty, \lim_{x \rightarrow 0^-} y = -\infty \Rightarrow$ TCD là $x = 0$.

Vậy hàm số có tiệm cận xiên $y = 2x - 1$ và tiệm cận đứng $x = 0$.

g) Tập xác định: $D = \mathbb{R} \setminus \{0\}$. Hàm số viết thành $y = -x + 3 + \frac{1}{1 - x}$.

Ta có $\lim_{x \rightarrow \pm\infty} [y - (-x + 3)] = 0 \Rightarrow$ TCX là $y = -x + 3$; $\lim_{x \rightarrow 1^+} y = -\infty, \lim_{x \rightarrow 1^-} y = +\infty \Rightarrow$ TCD là $x = 1$.

Vậy hàm số có tiệm cận xiên $y = -x + 3$ và tiệm cận đứng $x = 1$.

h) Tập xác định: $D = \left(-\infty; \frac{-1 - \sqrt{5}}{2}\right] \cup \left[\frac{-1 + \sqrt{5}}{2}; +\infty\right)$. Ta có

- $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\sqrt{x^2 + x - 1}}{x} = 1$; $\lim_{x \rightarrow +\infty} (\sqrt{x^2 + x - 1} - x) = \frac{1}{2} \Rightarrow$ TCX là $y = x + \frac{1}{2}$.
- $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{\sqrt{x^2 + x - 1}}{x} = -1$; $\lim_{x \rightarrow -\infty} (\sqrt{x^2 + x - 1} + x) = -\frac{1}{2} \Rightarrow$ TCX là $y = -x - \frac{1}{2}$.

Vậy hàm số có hai tiệm cận xiên $y = x + \frac{1}{2}$ và $y = -x - \frac{1}{2}$.

i) Tập xác định: $D = (-\infty; -2] \cup [0; +\infty)$. Ta có

- $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x + \sqrt{x^2 + 2}}{x} = 2$; $\lim_{x \rightarrow +\infty} (x + \sqrt{x^2 + 2} - 2x) = \frac{1}{2} \Rightarrow$ TCX là $y = 2x + \frac{1}{2}$.
- $\lim_{x \rightarrow -\infty} (x + \sqrt{x^2 + 2x}) = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x^2 - x^2 + 2x}{x - \sqrt{x^2 + 2x}} = -1 \Rightarrow$ TCN là $y = -1$.

Vậy hàm số có tiệm cận xiên $y = 2x + \frac{1}{2}$ và tiệm cận ngang $y = -1$.

Bài tập 1.29. Tìm m để đồ thị hàm số $y = \frac{mx^2 - 2m(m-1)x - 3m^2 + m - 2}{x + 2}$ có tiệm cận xiên đi qua $A(-1; -3)$.

Lời giải. Tập xác định: $D = \mathbb{R} \setminus \{-2\}$. Hàm số viết thành $y = mx - 2m^2 + \frac{m^2 + m - 2}{x + 2}$.

Do đó với $m \neq 0, m \neq 1, m \neq -2$ hàm số có tiệm cận xiên $y = mx - 2m^2$.

Khi đó tiệm cận xiên qua $A(-1; -3) \Leftrightarrow -3 = -m - 2m^2 \Leftrightarrow \begin{cases} m = 1 \text{ (loại)} \\ m = -\frac{3}{2} \end{cases}$.

Vậy với $m = -\frac{3}{2}$ thì tiệm cận xiên của hàm số đã cho qua $A(-1; -3)$.

Bài tập 1.30. Tìm m để hàm số $y = \frac{2x^2 + (m+1)x - 3}{x + m}$ có giao hai tiệm cận nằm trên parabol $(P): y = x^2 + 2x - 1$.

Lời giải. Tập xác định: $D = \mathbb{R} \setminus \{-m\}$. Hàm số viết thành $y = 2x - m + 1 + \frac{m^2 - m - 3}{x + m}$.

Do đó với $m \neq \frac{1 \pm \sqrt{5}}{2}$ hàm số có tiệm cận xiên $y = 2x - m + 1$ và tiệm cận đứng $x = -m$.

Suy ra giao hai tiệm cận là $I(-m; 1 - 3m)$.

Khi đó $I \in (P) \Leftrightarrow 1 - 3m = m^2 - 2m - 1 \Leftrightarrow \begin{cases} m = 1 \\ m = -2 \end{cases}$ (thỏa mãn).

Vậy với $m = 1$ và $m = -2$ thì hàm số có giao hai tiệm cận thuộc (P) .

Bài tập 1.31. (A-08) Tìm m để góc giữa hai tiệm cận của hàm số $y = \frac{mx^2 + (3m^2 - 2)x - 2}{x + 3m}$ bằng 45° .

Lời giải. Tập xác định: $D = \mathbb{R} \setminus \{-3m\}$. Hàm số viết thành $y = mx - 2 + \frac{6m - 2}{x + 3m}$.

• Với $m = \frac{1}{3}$ hàm số không có tiệm cận nên không thỏa mãn yêu cầu bài toán.

• Với $m = 0$ hàm số có tiệm cận ngang $y = -2$ và tiệm cận đứng $x = -3m$.

Khi đó góc giữa hai tiệm cận bằng 90° nên không thỏa mãn yêu cầu bài toán.

• Với $m \neq \frac{1}{3}, m \neq 0$ hàm số có tiệm cận xiên $y = mx - 2$ và tiệm cận đứng $x = -3m$.

Khi đó góc giữa hai tiệm cận bằng $45^\circ \Leftrightarrow$ góc giữa tiệm cận xiên và tia Ox bằng 45° hoặc bằng $135^\circ \Leftrightarrow m = \pm 1$.

Vậy với $m = \pm 1$ thì hàm số có góc giữa hai tiệm cận bằng 45° .

Bài tập 1.32. Tìm m để đồ thị hàm số $y = \frac{x^2 + mx - 1}{x - 1}$ có tiệm cận xiên tạo với các trục tọa độ một tam giác có diện tích bằng 4.

Lời giải. Tập xác định: $D = \mathbb{R} \setminus \{1\}$. Hàm số viết thành $y = x + m + 1 + \frac{m}{x - 1}$.

Do đó với $m \neq 0$ hàm số có tiệm cận xiên $y = x + m + 1$.

Tiệm cận xiên cắt Ox tại $A(-m-1; 0) \Rightarrow OA = |m+1|$ và cắt Oy tại $B(0; m+1) \Rightarrow OB = |m+1|$.

Khi đó $S_{\triangle OAB} = \frac{1}{2}OA \cdot OB = \frac{1}{2}(m+1)^2 \Rightarrow \frac{1}{2}(m+1)^2 = 4 \Leftrightarrow m = -1 \pm 2\sqrt{2}$.

Vậy với $m = -1 \pm 2\sqrt{2}$ thì tiệm cận xiên tạo với hai trục tọa độ một tam giác có diện tích bằng 4.

Bài tập 1.33. Tìm m để đồ thị hàm số $y = \frac{2x^2 - (5m-1)x + 4m^2 - m - 1}{x - m}$ có tiệm cận xiên tạo với các trục tọa độ một tam giác có diện tích bằng 4.

Lời giải. Tập xác định: $D = \mathbb{R} \setminus \{m\}$. Hàm số viết thành $y = 2x - 3m + 1 + \frac{m^2 - 1}{x - 1}$.

Do đó với $m \neq \pm 1$ hàm số có tiệm cận xiên $y = 2x - 3m + 1$.

Tiệm cận xiên cắt Ox tại $A(\frac{3m-1}{2}; 0) \Rightarrow OA = \frac{|3m-1|}{2}$ và cắt Oy tại $B(0; -3m+1) \Rightarrow OB = |3m-1|$.

Khi đó $S_{\triangle OAB} = \frac{1}{2}OA \cdot OB = \frac{1}{4}(3m-1)^2 \Rightarrow \frac{1}{4}(3m-1)^2 = 4 \Leftrightarrow \begin{cases} m = -1 \text{ (loại)} \\ m = \frac{5}{3} \end{cases}$.

Vậy với $m = \frac{5}{3}$ thì tiệm cận xiên tạo với hai trục tọa độ một tam giác có diện tích bằng 4.

Bài tập 1.34. Cho hàm số $y = \frac{3x-1}{x-2}$. Chứng minh tích các khoảng cách từ điểm M nằm trên đồ thị hàm số đến hai tiệm cận không đổi.

Lời giải. Tập xác định: $D = \mathbb{R} \setminus \{2\}$. Hàm số có tiệm cận ngang $y = 3 \Leftrightarrow y-3 = 0$ và tiệm cận đứng $x = 2 \Leftrightarrow x-2 = 0$. Lấy $M(x_0; \frac{3x_0-1}{x_0-2})$ thuộc đồ thị ta có

$$d(M, \text{TCN}) = \frac{5}{|x_0-2|}; d(M, \text{TCD}) = |x_0-2| \Rightarrow d(M, \text{TCN}) \cdot d(M, \text{TCD}) = 5$$

Vậy tích các khoảng cách từ M đến hai tiệm cận là một hằng số (đpcm).

Bài tập 1.35. Cho hàm số $y = \frac{-x^2+4x-3}{x-2}$. Chứng minh tích các khoảng cách từ điểm M nằm trên đồ thị hàm số đến hai tiệm cận là một hằng số.

Lời giải. Tập xác định: $D = \mathbb{R} \setminus \{2\}$. Hàm số viết thành $y = -x + 2 + \frac{1}{x-2}$.

Do đó hàm số có tiệm cận xiên $y = -x + 2 \Leftrightarrow x + y - 2 = 0$ và tiệm cận đứng $x = 2 \Leftrightarrow x - 2 = 0$.

Lấy $M(x_0; -x_0 + 2 + \frac{1}{x_0-2})$ thuộc đồ thị ta có

$$d(M, \text{TCN}) = \frac{1}{|x_0-2|}; d(M, \text{TCD}) = |x_0-2| \Rightarrow d(M, \text{TCN}) \cdot d(M, \text{TCD}) = 1$$

Vậy tích các khoảng cách từ M đến hai tiệm cận là một hằng số (đpcm).

Bài tập 1.36. Tìm M thuộc đồ thị hàm số $y = \frac{3x-5}{x-2}$ để tổng khoảng cách từ M đến hai tiệm cận là nhỏ nhất.

Lời giải. Tập xác định: $D = \mathbb{R} \setminus \{2\}$. Hàm số có tiệm cận ngang $y = 3 \Leftrightarrow y-3 = 0$ và tiệm cận đứng $x = 2 \Leftrightarrow x-2 = 0$. Lấy $M(x_0; \frac{3x_0-5}{x_0-2})$ thuộc đồ thị ta có $d(M, \text{TCN}) = \frac{1}{|x_0-2|}; d(M, \text{TCD}) = |x_0-2|$.

Khi đó $d(M, \text{TCN}) + d(M, \text{TCD}) = \frac{1}{|x_0-2|} + |x_0-2| \geq 2$. Dấu bằng xảy ra $\Leftrightarrow \frac{1}{|x_0-2|} = |x_0-2| \Leftrightarrow \begin{cases} x_0 = 1 \\ x_0 = 3 \end{cases}$.

Vậy tổng các khoảng cách từ M đến hai tiệm cận nhỏ nhất bằng 2 khi $M(1; 2)$ và $M(3; 4)$.

Bài tập 1.37. Tìm điểm M thuộc đồ thị hàm số $y = \frac{x^2+2x-2}{x-1}$ để tổng khoảng cách từ M đến hai tiệm cận là nhỏ nhất.

Lời giải. Tập xác định: $D = \mathbb{R} \setminus \{1\}$. Hàm số viết thành $y = x + 3 + \frac{1}{x-1}$.

Do đó hàm số có tiệm cận xiên $y = x + 3 \Leftrightarrow x - y + 3 = 0$ và tiệm cận đứng $x = 1 \Leftrightarrow x - 1 = 0$.

Lấy $M(x_0; x_0 + 3 + \frac{1}{x_0-1})$ thuộc đồ thị ta có $d(M, \text{TCN}) = \frac{1}{|x_0-1|}; d(M, \text{TCD}) = |x_0-1|$.

Khi đó $d(M, \text{TCN}) + d(M, \text{TCD}) = \frac{1}{|x_0-1|} + |x_0-1| \geq 2$. Dấu bằng xảy ra $\Leftrightarrow \frac{1}{|x_0-1|} = |x_0-1| \Leftrightarrow \begin{cases} x_0 = 0 \\ x_0 = 2 \end{cases}$.

Vậy tổng các khoảng cách từ M đến hai tiệm cận nhỏ nhất bằng 2 khi $M(0; 2)$ và $M(2; 6)$.

§5. Khảo Sát Sự Biến Thiên Và Vẽ Đồ Thị Hàm Số

Bài tập 1.38. Khảo sát sự biến thiên và vẽ đồ thị của các hàm số sau

- a) $y = x^3 + 3x^2 - 4$. b) $y = -x^3 + 3x - 2$. c) $y = -x^3 + 1$. d) $y = x^3 + 3x^2 + 3x + 1$.
e) $y = x^3 + x - 2$. f) $y = -2x^3 - x - 3$. g) $y = -x^3 + 3x^2 - 1$. h) $y = \frac{1}{3}x^3 - x^2 - 3x - \frac{5}{3}$.

Bài tập 1.39. Khảo sát sự biến thiên và vẽ đồ thị của các hàm số sau

- a) $y = x^4 - 2x^2 - 3$. b) $y = x^4 + 2x^2 - 1$. c) $y = \frac{1}{2}x^4 + x^2 - \frac{3}{2}$. d) $y = 3 - 2x^2 - x^4$.
e) $y = -x^4 + 2x^2 - 2$. f) $y = 2x^4 - 4x^2 + 1$. g) $y = -2x^4 - 4x^2 + 1$. h) $y = x^4 - 4x^2 + 3$.

Bài tập 1.40. Khảo sát sự biến thiên và vẽ đồ thị của các hàm số sau

- a) $y = \frac{4}{2-x}$. b) $y = \frac{x-3}{2-x}$. c) $y = \frac{x+3}{x-1}$. d) $y = \frac{-x+2}{2x+1}$.
e) $y = \frac{x}{x+1}$. f) $y = \frac{x+2}{x-1}$. g) $y = \frac{2}{x+1}$. h) $y = \frac{x+3}{x-2}$.

Bài tập 1.41. Khảo sát sự biến thiên và vẽ đồ thị của các hàm số sau

- a) $y = \frac{x^2+2x+2}{x+1}$. b) $y = \frac{x^2-2x-3}{x-2}$. c) $y = \frac{2x^2+5x+4}{x+2}$. d) $y = \frac{-x^2-2x}{x+1}$.
e) $y = \frac{x^2-2x}{x-1}$. f) $y = \frac{2x^2-x+1}{1-x}$. g) $y = -x+2+\frac{1}{x-1}$. h) $y = x-1+\frac{1}{x+1}$.

Học sinh tự giải.